Trace ve Kellogg Yöntemleri Kullanılarak İntegral Operatörlerinin Özdeğerlerinin Nümerik Hesabı

Erkan Taşdemir(1); Yüksel Soykan(2); Melih Göcen(3)

(1)*Kırklareli Üniversitesi, Kırklareli, Türkiye,* erkantasdemir@hotmail.com

(2)*Bülent Ecevit Üniversitesi, Zonguldak, Türkiye,* yuksel_soykan@hotmail.com

(3)*Bülent Ecevit Üniversitesi, Zonguldak, Türkiye,* gocenm@hotmail.com

Özet

Bu çalışmada, Trace ve Kellogg yaklaşım yöntemleri kullanılarak belirli rasyonel çekirdekli integral operatörlerinin özdeğerleri hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Özdeğer, İntegral Operatör, Özdeğer Yaklaşımları.

Kaynaklar

[1] M. Krasnov, A. Kiselev and G. Makarenko, Problems and Exercises in Integral Equation, Mir Publisher, Moscow, 1971.
[2] P.K. Kythe, P. Puri, Computational Methods for Linear Integral Equations, Birkhauser, Boston, 2002.
[3] M.A. Al Abbas, Integral Operators with Rational Kernels, PhD Thesis, University of Manchester, 1997.
[4] M. Göcen, Rasyonel Çekirdekli İntegral Operatörler, Doktora Tezi, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, 2010.
[5] E. Taşdemir, Pozitif integral Operatörler, Yükseklisans Tezi, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, 2011.

1. Giriş

Bu kısımda çalışma boyunca kullanılacak kavramlar ve notasyonlar kısaca verilmiştir. Burada sunulan bilgiler Taşdemir (2011), Göcen (2010), Kythe and Puri (2002) ve Abbas (1997) kaynakları kullanılarak hazırlanmıştır.

Tanım.1.1 V bir vektör uzayı ve $T \in L(V)$ olsun. Bir $\lambda \in \mathbb{F}$ skaleri için,

$$T(x) = \lambda x$$

denklemi sıfırdan farklı bir $x \in V$ çözümüne sahipse λ 'ya T nin bir *özdeğeri* denir.

Tanım 1.2 $\square_{a,b} = \{(s,t) : a \le s \le b, a \le t \le b\} = [a,b] \times [a,b] \subset \mathbb{R}^2$ kümesi $\mathbb{R}^2$ düzlemi içinde bir karedir. $k : \square_{a,b} \to \mathbb{C}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Şimdi, herhangi bir $f \in L^2[a,b]$ için

$$g(s) = \int_a^b k(s,t)\, f(t)\, dt \tag{1.1}$$

İle bir $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonu tanımlayalım. g fonksiyonu bilinen ve f de bilinmeyen olarak kabul edilirse o zaman (1.1) formundaki denkleme birinci tipten Fredholm integral denklemi adı verilir. Burada k ya denklemin çekirdeği denir. Bu, lineer bir operatörün sıfır uzayını göstermek için kullanılan çekirdek teriminin farklı bir kullanımıdır.

$$Kf(s) = \int_a^b k(s,t)\, f(t)\, dt \tag{1.2}$$

İle tanımlı $K : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ operatörüne bir (k çekirdekli ya da k çekirdeğinin ürettiği) Fredholm integral operatörü veya kısaca bir integral operatör adı verilir.

Tanım 1.3 Bir H Hilbert uzayı üzerinde herhangi bir kompakt T operatörü için,

a) T nin pozitif özdeğerleri

$\lambda_1^+(T) \ge \lambda_2^+(T) \ge \lambda_3^+(T) \ge \cdots$

Azalan sıralaması içinde katlılıkları tekrar etmek üzere $\left(\lambda_n^+(T)\right)$ ile gösterilir ve T nin negatif özdeğerlerinin artan sıralaması içinde katlılıkları tekrar etmek üzere $\left(\lambda_n^-(T)\right)$ ile gösterilir.

b) T nin pozitif özdeğerlerinin sayısını ve negatif özdeğerlerinin sayısını sırasıyla $N^+(T)$ ve $N^-(T)$ ile göstereceğiz.

Uyarı 1.4 Bu çalışmada $k(s,t) = \dfrac{1}{a + b(s+t) + cst}$ formundaki çekirdeklerin özel bir hali olan $b^2 = a \cdot c$ şartını sağlayan çekirdekler incelenecektir. Bu durum Abbas (1997) ve Göcen (2010) tarafından araştırılmış olup pozitif özdeğer sayısının $N^+(K) = 1$ ve negatif özdeğer sayısının $N^-(K) = 0$ olduğu tespit edilmiştir.

2. Kellogg Yöntemi

Bu yöntem ile ilgili bilgilere Krasnov (1971) kaynağından ulaşılabilir.

$k(s,t)$ çekirdeği pozitif tanımlı simetrik bir çekirdek ve $w(s)$, $L^2(a,b)$ içinde keyfi bir fonksiyon olsun.

$$\begin{aligned} w_1(s) &= \int_a^b k(s,t)\,w(t)\,dt \\ w_2(s) &= \int_a^b k(s,t)\,w_1(t)\,dt \\ &\vdots \\ w_n(s) &= \int_a^b k(s,t)\,w_{n-1}(t)\,dt \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.1}$$

ile tanımlı

$$\{w(s)\} = K^n w, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

fonksiyonlar dizisi ve

$$\left\{ \frac{\|w_{n-1}\|}{\|w_n\|} \right\} \tag{2.2}$$

ile belirlenen sayı dizisi ele alınmaktadır.

$k(s,t)$ çekirdeğinin ortogonal özfonksiyonları $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots$ ve bunlara karşılık gelen özdeğerler $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots$ olsun. Bunların yanı sıra $w(s)$ fonksiyonları, $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_{k-1}(s)$ fonksiyonları ile ortogonal olsun fakat $\varphi_k(s)$ fonksiyonu ile ortogonal olmasın. Bu durumda (2.1) dizisinin limiti λ_k özdeğeri olacaktır.

Bu takdirde,

$$\left\{ \frac{w_n}{\|w_n\|} \right\}$$

fonksiyon dizisi λ_k özdeğeri ile eşlenen özfonksiyonların lineer kombinasyonu olan bir fonksiyona yakınsayacaktır.

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\|w_n\|}} \tag{2.3}$$

dizisi de (2.1) dizisinin yakınsadığı fonksiyona yakınsayacaktır. $\langle w, \varphi_1 \rangle \ne 0$ ise en küçük özdeğeri veren iki ayrı formül bulunabilir:

$$\lambda_1 \approx \frac{\|w_{n-1}\|}{\|w_n\|} \tag{2.4}$$

Ve

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt[n]{\|w_n\|}} \tag{2.5}$$

(2.4) formülü λ_1 in değerini olduğundan daha büyük olarak verir. $k(s,t)$ çekirdeği pozitif tanımlı değil ise (2.4) ve (2.5) formülleri verilen çekirdeğin özdeğerinin en küçük olanının mutlak değerini verir. Bu yöntem, sadece λ_1 özdeğerinin yaklaşık değerini bulmak için yapılan en iyi yaklaşımdır.

2.1. Örnek

Pozitif tanımlı simetrik çekirdek $k(s,t)$ aşağıda verilmiştir.

$$k(s,t) = \frac{1}{25+15(s+t)+9st} \tag{2.6}$$

Bu $k(s,t)$ çekirdeğine karşılık gelen integral operatörün özdeğerini Kellogg Yöntemi ile yaklaşık olarak hesaplayalım.

Çözüm.

$w(s) = s$ alındığında (2.1) de verilen fonksiyonlar dizisi

$$w_1(s) = \int_{-1}^{1} \frac{t}{25+15(s+t)+9st}\,dt = \frac{2(3-5\log 2)}{9(5+3s)}$$

$$w_2(s) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{25+15(s+t)+9st}\,\frac{2(3-5\log 2)}{9(5+3t)}\,dt = \frac{2(3-5\log 2)}{72(5+3s)}$$

$$w_3(s) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{25+15(s+t)+9st}\,\frac{2(3-5\log 2)}{72(5+3t)}\,dt = \frac{2(3-5\log 2)}{576(5+3s)}$$

$$\vdots$$

$$w_n(s) = \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \frac{3-5\log 2}{5+3s}$$

olarak elde edilir. Buradan,

$$\|w_n(s)\| = \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} (3-5\log 2)\sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{1}{(5+3s)^2}\,ds}$$

$$= \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} (3-5\log 2)\sqrt{\frac{1}{8}}$$

bulunur ve özdeğer yaklaşık olarak

$$\lambda_1 \approx \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^{n-2} (3-5\log 2)\sqrt{\frac{1}{8}}}{\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} (3-5\log 2)\sqrt{\frac{1}{8}}} = 8.$$

hesaplanır.

2.2. Örnek

Pozitif tanımlı simetrik çekirdek $k(s,t)$ aşağıda verilmiştir.

$$k(s,t)=\frac{1}{36+6(s+t)+st} \tag{2.7}$$

Bu $k(s,t)$ çekirdeğine karşılık gelen integral operatörün özdeğerini Kellogg Yöntemi ile yaklaşık olarak hesaplayalım.

Çözüm.

$w(s)=s$ alındığında (2.1) de verilen fonksiyonlar dizisi

$$w_1(s)=\int_{-1}^{1}\frac{t}{36+6(s+t)+st}dt=\frac{2+6\log\frac{5}{7}}{6+s}$$

$$w_2(s)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{36+6(s+t)+st}\frac{2+6\log\frac{5}{7}}{6+t}dt=\frac{2\left(2+6\log\frac{5}{7}\right)}{35(6+s)}$$

$$w_3(s)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{36+6(s+t)+st}\frac{2\left(2+6\log\frac{5}{7}\right)}{35(6+t)}dt=\frac{4\left(2+6\log\frac{5}{7}\right)}{1225(6+s)}$$

$$\vdots$$

$$w_n(s)=\left(\frac{2}{35}\right)^{n-1}\frac{2+6\log\frac{5}{7}}{6+s}$$

olarak elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}\|w_n(s)\|&=\left(\frac{2}{35}\right)^{n-1}\left(2+6\log\frac{5}{7}\right)\sqrt{\int_{-1}^{1}\frac{1}{(6+s)^2}ds}\\&=\left(\frac{2}{35}\right)^{n-1}\left(2+6\log\frac{5}{7}\right)\sqrt{\frac{2}{35}}\end{aligned}$$

bulunur ve özdeğer yaklaşık olarak

$$\lambda_1\approx\frac{\left(\frac{2}{35}\right)^{n-2}\left(2+6\log\frac{5}{7}\right)\sqrt{\frac{2}{35}}}{\left(\frac{2}{35}\right)^{n-1}\left(2+6\log\frac{5}{7}\right)\sqrt{\frac{2}{35}}}=\frac{35}{2}.$$

hesaplanır.

3. Trace Yöntemi

Bu yöntem ile ilgili bilgilere Krasnov (1971) kaynağından ulaşılabilir.

$k_m(s,t)$ ile m. ardışık çekirdek gösterilmek üzere

$$A_m = \int_a^b k_m(s,t)\,dt$$

sayısına $k(s,t)$ çekirdeğinin m. izi adı verilir ve

$$\left(K^m\phi\right) = \int_a^b k_m(s,t)\phi(t)\,dt, \quad a \le s \le t \le b$$

dir.

$$|\lambda_1| \approx \sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}} \tag{3.1}$$

Formülü en küçük karakteristik sayı olan λ_1 ve m 'nin yeterince büyük değerleri için geçerlidir. (3.1) formülü $|\lambda_1|$'in değerini olduğundan daha büyük olarak verir.

Simetrik çekirdekler için çift mertebeden izler aşağıdaki formüller yardımıyla hesaplanır.

$$A_{2m} = \int_a^b\int_a^b k_m^2(s,t)\,dsdt = 2\int_a^b\int_a^s k_m^2(s,t)\,dtds \tag{3.2}$$

3.1. Örnek

Pozitif tanımlı simetrik çekirdek $k(s,t)$ aşağıda verilmiştir.

$$k(s,t) = \frac{1}{25+15(s+t)+9st} \tag{3.3}$$

Bu $k(s,t)$ çekirdeğine karşılık gelen integral operatörün özdeğerini Trace Yöntemi ile yaklaşık olarak hesaplayalım.

Çözüm.

(3.3) ile verilen $k(s,t)$ çekirdeği simetrik olduğundan,

$$\begin{aligned} k_2(s,t) &= \int_{-1}^{1} k(s,z)k(z,t)\,dz \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{25+15(s+z)+9sz}\,\frac{1}{25+15(z+t)+9zt}\,dz \\ &= \frac{1}{8(5+3s)(5+3t)} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. (3.2) denkleminde m=1 ve m=2 alındığında,

$$A_2=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k_1^2(s,t)\,dsdt=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{25+15(s+t)+9st}\right)^2 dsdt=\frac{1}{64}$$

$$A_4=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k_2^2(s,t)\,dsdt=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{8(5+3s)(5+3t)}\right)^2 dsdt=\frac{1}{4096}.$$

değerleri bulunur. Bu değerler, özdeğeri bulmak için (3.1) de yerine yazıldığında, aranan özdeğer yaklaşık olarak

$$|\lambda_1|\approx\sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{4096}}}=\sqrt{64}=8$$

olduğu görülür.

3.2. Örnek

Pozitif tanımlı simetrik çekirdek $k(s,t)$ aşağıda verilmiştir.

$$k(s,t)=\frac{1}{36+6(s+t)+st} \tag{3.4}$$

Bu $k(s,t)$ çekirdeğine karşılık gelen integral operatörün özdeğerini Trace Yöntemi ile yaklaşık olarak hesaplayalım.

Çözüm.

(3.4) ile verilen $k(s,t)$ çekirdeği simetrik olduğundan,

$$\begin{aligned}k_2(s,t)&=\int_{-1}^{1}k(s,z)k(z,t)\,dz\\&=\int_{-1}^{1}\frac{1}{36+6(s+z)+sz}\,\frac{1}{36+6(z+t)+zt}\,dz\\&=\frac{2}{35(6+s)(6+t)}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. (3.2) denkleminde m=1 ve m=2 alındığında,

$$A_2=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k_1^2(s,t)\,dsdt=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{36+6(s+t)+st}\right)^2 dsdt=\frac{4}{1225}$$

$$A_4=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k_2^2(s,t)\,dsdt=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{35(6+s)(6+t)}\right)^2 dsdt=\frac{16}{1500625}$$

değerleri bulunur. Bu değerler, özdeğeri bulmak için (3.1) de yerine yazıldığında, aranan özdeğer yaklaşık olarak

$$|\lambda_1| \approx \sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}} = \sqrt{\frac{\frac{4}{1225}}{\frac{16}{1500625}}} = \sqrt{\frac{1225}{4}} = \frac{35}{2}$$

olduğu görülür.

4. Sonuç

Bu çalışmada Trace ve Kellogg yaklaşım yöntemleri kullanılarak

$$k(s,t) = \frac{1}{25+15(s+t)+9st}$$

Ve

$$k(s,t) = \frac{1}{36+6(s+t)+st}$$

rasyonel çekirdeklerine karşılık gelen özdeğerler yaklaşık olarak nümerik biçimde hesaplandı. Elde edilen özdeğerler aşağıda tablo olarak verilmiştir.

$k(s,t)$	Trace Yöntemi ile bulunan özdeğerler	Kellogg Yöntemi ile bulunan özdeğerler
$k(s,t) = \frac{1}{25+15(s+t)+9st}$	$\lambda = 8$	$\lambda = 8$
$k(s,t) = \frac{1}{36+6(s+t)+st}$	$\lambda = \frac{35}{2}$	$\lambda = \frac{35}{2}$

$k(s,t)$ *simetrik çekirdeklerine karşılık gelen özdeğerler tablosu.*

Sonuç olarak gerek Trace Yöntemi ile bulunan gerekse Kellogg Yöntemi ile yaklaşık olarak bulunan özdeğerler nümerik olarak eşittir.

5. Kaynaklar

[1] M. Krasnov, A. Kiselev and G. Makarenko, Problems and Exercises in Integral Equation, Mir Publisher, Moscow, 1971.

[2] P.K. Kythe, P. Puri, Computational Methods for Linear Integral Equations, Birkhauser, Boston, 2002.

[3] M.A. Al Abbas, Integral Operators with Rational Kernels, PhD Thesis, University of Manchester, 1997.

[4] M. Göcen, Rasyonel Çekirdekli İntegral Operatörler, Doktora Tezi, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, 2010.

[5] E. Taşdemir, Pozitif integral Operatörler, Yükseklisans Tezi, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, 2011.