**Ritz Yöntemi Kullanılarak İntegral Operatörlerin Özdeğerlerinin Yaklaşık Hesabı**

Yüksel SOYKAN, Erkan TAŞDEMİR, Melih GÖCEN

*Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 67100 Zonguldak*

yuksel_soykan@hotmail.com, erkantasdemir@hotmail.com, gocenm@hotmail.com

Özet: Bu çalışmada, belirli rasyonel çekirdekli integral operatörlerin özdeğerlerinin yaklaşık hesaplarını Ritz yaklaşım yöntemini kullanarak hesaplayacağız.

2010 AMS Konu Sınıflandırılması: 45C05

Anahtar Kelimeler: Özdeğer, integral operatörü

## 0.1 Giriş

**Tanım 0.1.1** *$V$ bir vektör uzayı ve $T \in L(V)$ olsun. Bir $\lambda \in \mathbb{F}$ skaleri için*

$T(x) = \lambda x$

*denklemi sıfırdan farlı bir $x \in V$ çözümüne sahipse $\lambda$ ya $T$ nin bir özdeğeri denir ve sıfırdan farklı böyle bir $x$ çözümüne özvektör adı verilir.*

Bir $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı üzerinde herhangi bir kompakt simetrik $T$ operatörü için,

**a)** $T$ nin pozitif özdeğerleri

$\lambda_1^+(T) \geq \lambda_2^+(T) \geq \lambda_3^+(T) \geq ...$

azalan sıralaması içinde katlılıkları tekrar etmek üzere $(\lambda_n^+(T))$ ile gösterilir ve $T$ nin negatif özdeğerleri artan sıralama içinde katlılıkları tekrar etmek üzere $\left(\lambda_n^-(T)\right)$ ile gösterilir.

**b)** $T$ nin pozitif özdeğerlerinin sayısını ve negatif özdeğerlerinin sayısını sırasıyla $N^+(T)$ ve $N^-(T)$ ile göstereceğiz.

$\square_{a,b} = \{(s,t) : a \leq s \leq b, a \leq t \leq b\} = [a,b] \times [a,b] \subset \mathbb{R}^2$

olmak üzere $k : \square_{a,b} \to \mathbb{C}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Şimdi, herhangi bir $f \in L^2[a,b]$ için

$$g(s) = \int_a^b k(s,t)f(t)dt \tag{0.1.1}$$

ile bir $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonu tanımlanır. $g$ fonksiyonu bilinen ve $f$ da bilinmeyen olarak kabul edilirse o zaman (0.1.1) formundaki denkleme birinci tipten Fredholm integral denklemi adı verilir. Burada $k$ ya denklemin çekirdeği denir.

$$Kf(s) = \int_a^b k(s,t)f(t)dt \tag{0.1.2}$$

ile tanımlı $K : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ operatörüne bir ($k$ çekirdekli ya da $k$ çekirdeğinin ürettiği) Fredholm integral operatörü veya kısaca bir integral operatör adı verilir.

$I = [a,b]\,, -\infty < a < b < +\infty$ denirse $k : I \times I \to \mathbb{C}$ ölçülebilir fonksiyonu verildiğinde $k$ çekirdekli $K_I : L^2(I) \to L^2(I)$ integral operatörünü

$$K_I f(s) = \int_I k(s,t)f(t)dt$$

ile gösterelim. Hangi $I$ aralığında çalıştığımız açıksa $K_I$ yerine basitçe $K$ yazarız. Hepsi aynı anda sıfır olmayan $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ sayıları için $p(s,t) = a + b(s+t) + cst$ ve $q(s,t) = d + e(s+t) + fst$ olsun ve $k = p/q$ olduğunu kabul edelim. Kapalı (sınırlı) bir $I$ aralığı eğer her $s,t \in I$ için $q(s,t) \neq 0$ özelliğini sağlarsa $k$ için kabul edilebilirdir denir. Bu durumda $L^2(I)$ üzerinde $f \in L^2(I), s \in I$ için $K_I f(s) = \int\limits_I \frac{p(s,t)}{q(s,t)} f(t)dt$ ile tanımlı sürekli bir $k$ çekirdekli kompakt ve simetrik bir $K_I$ integral operatörünü elde ederiz. Bu durumda $k$ çekirdekli $K$ integral operatörü, $L^2(I)$ üzerinde kompakt ve simetriktir. $k$ için kabul edilebilir tüm aralıkların kümesini göstermek için $Ad(k)$, $T$ nin kesin pozitif özdeğerlerinin katlılıklarının toplamı için $N^+(k,I)$, $T$ nin negatif özdeğerlerinin katlılıklarının toplamı için $N^-(k,I)$ notasyonları kullanılacaktır. Daha önce verilen notasyonlarla

$$N^+(k,I) = N^+(K) \text{ ve } N^-(k,I) = N^-(K)$$

olur. Ayrıca $\lambda^+(k,I)$ için $\lambda^+(K)$ , $\lambda^-(k,I)$ içinde $\lambda^-(K)$ gösterimleri kullanılmaktadır. $K_I$ nın pozitif ve negatif özdeğerlerin yaklaşık hesaplamalarını yapacağız. $K_I$ nın pozitif ve negatif özdeğeri sayıları ile ilgili temel bilgileri verebiliriz. Bu bilgiler (Abbas, 1997) den alınmıştır.

### 0.1.1 $k(s,t) = \dfrac{1}{a + b(s+t) + cst}$ DURUMU

Eğer $b^2 = ac$

$N^{+}(K) = 1$ ve $N^{-}(K) = 0$

dir. Eğer $b^2 > ac$ ise

$N^{+}(K) = \infty$ ve $N^{-}(K) = 0$

dir. Eğer $b^2 < ac$

$N^{+}(K) = \infty$ ve $N^{-}(K) = \infty$

dir.

### 0.1.2 $k(s,t) = \dfrac{a + b(s+t) + cst}{1 - st}$ DURUMU

$a \geq 0$ kabul edebiliriz.
1. $b = 0$ olsun. $a + c = 0$ ise

$N^{+}(K) = 1$ ve $N^{-}(K) = 0$

dir. Eğer $a + c > 0$ ise

$N^{+}(K) = \infty$ ve $N^{-}(K) = 0$

dir. Eğer $a + c < 0$ ve $a = 0$ ise

$N^{+}(K) = 0$ ve $N^{-}(K) = \infty$

dir. Eğer $a + c < 0$ ve $a > 0$ ise

$N^{+}(K) = 1$ ve $N^{-}(K) = \infty$

dir.

2. $b \neq 0$ olsun. $a > 0$ ve $ac \geq 1$ ise

$N^+(K) = \infty$ ve $N^-(K) = 0$

dir.
Eğer $ac < 1$ ise aşağıdaki üç durum söz konusudur.
(i) $a + c \geq 2$ ve $a > 1$ ise

$N^+(K) = \infty$ ve $N^-(K) = 0$

dir.
(ii) $a + c \geq 2$ ve $c > 1$ ise

$N^+(K) = \infty$ ve $N^-(K) = 1$

dir.
(iii) $0 \leq a + c < 2$ ise

$N^+(K) = \infty$ ve $N^-(K) = \infty$

dir.

## 0.2 Ritz Yöntemi

Bu bölümde özdeğerlerin bulunması için kullanılacak yöntem tanıtılacaktır. Burada (Reddy 1998, Yaşar 1988) kaynaklarından yararlanılmıştır. Ritz Yönteminde kullanılacak Legendre ve Chebyshev polinomlarını tanıtarak başlayacağız. Aşağıda verilen iki tanım Yaşar'dan (1988) alınmıştır.

**Tanım 0.2.1**

$$P_n(s) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{ds^n} \left(s^2 - 1\right)^n$$

*ile tanımlanan polinoma Legendre polinomu denir. Bir kaç Legendre polinomu olarak*

$$\begin{aligned} P_0(s) &= 1, \quad P_1(s) = s, \qquad\qquad P_2(s) = \frac{1}{2}\left(3s^2 - 1\right), \quad P_3(s) = \frac{1}{2}\left(5s^3 - 3s\right), \\ P_4(s) &= \frac{1}{8}\left(35s^4 - 30s^2 + 3\right), \quad P_5(s) = \frac{1}{8}\left(63s^5 - 70s^3 + 15s\right) \end{aligned}$$

*yazılabilir. Bütün durumlarda*

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) \ = (-1)^n$$

*dir.*

**Tanım 0.2.2**

$$T_n(s) = \cos(n.\cos^{-1} s), \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

*ile tanımlanan polinoma Chebyshev polinomu denir.* $T_n(s)$ *için indirgeme formülü*

$$T_{n+1}(s) = 2sT_n(s) - T_{n-1}(s)$$

*ile verilir. Chebyshev polinomlarının birkaçı*

$$T_0(s) = 1, \qquad T_1(s) = s, \qquad T_2(s) = 2s^2 - 1, \qquad T_3(s) = 4s^3 - 3s$$

*dir.*

Çekirdeği simetrik olan, yani $K(s,t) = K(t,s)$ bağıntısını gerçekleyen aşağıdaki integral denklem ele alınmaktadır:

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt, \qquad a \leq s \leq b.$$

$\{\psi_n(s)\}$ , ilk $n$ elemanı $[a,b]$ aralığı üzerinde lineer bağımsız ve $L_2(a,b)$ de tam olan bir fonksiyonlar dizisi olsun.

$$\varphi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s) \tag{0.2.1}$$

şeklindedir ve burada $a_j$ katsayıları $\|\varphi_n\| = 1$ olacak şekilde belirlenecektir. Bu koşul altında $\langle K\varphi_n, \varphi_n \rangle$ kuadratik formunun değerleri aranacaktır. Sonunda $a_j$ ler cinsinden yazılmış homojen lineer bir denklem sistemine ulaşılmaktadır (burada $\mu$ bir Lagrange çarpanıdır).

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ \left\langle K\psi_i, \psi_j \right\rangle - \mu \left\langle \psi_i, \psi_j \right\rangle \right\} a_j = 0, \qquad i = 1, ..., n \tag{0.2.2}$$

(0.2.2) nin sıfırdan farklı bir çözümünün olması için (0.2.2) nin determinantı sıfırdan farklı olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} \langle K\psi_1,\psi_1\rangle-\mu\langle\psi_1,\psi_1\rangle & \langle K\psi_1,\psi_2\rangle-\mu\langle\psi_1,\psi_2\rangle & \dots & \langle K\psi_1,\psi_n\rangle-\mu\langle\psi_1,\psi_n\rangle \\ \langle K\psi_2,\psi_1\rangle-\mu\langle\psi_2,\psi_1\rangle & \langle K\psi_2,\psi_2\rangle-\mu\langle\psi_2,\psi_2\rangle & \cdots & \langle K\psi_2,\psi_n\rangle-\mu\langle\psi_2,\psi_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle K\psi_n,\psi_1\rangle-\mu\langle\psi_n,\psi_1\rangle & \langle K\psi_n,\psi_2\rangle-\mu\langle\psi_n,\psi_2\rangle & \cdots & \langle K\psi_n,\psi_n\rangle-\mu\langle\psi_n,\psi_n\rangle \end{vmatrix}=0 \quad (0.2.3)$$

(0.2.3) denkleminin kökleri $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerini yaklaşık olarak verir. (0.2.1) denkleminin en büyük kökü, özdeğerlerinin en büyüğünün değerini olduğundan daha küçük olarak verir. (0.2.3) den $\mu$' yü bulup ve (0.2.2) de yerine koyarak (0.2.2) sisteminin sıfırdan farklı $a_j$ $(j=1,2,...,n)$ çözümleri araştırılmaktadır. Böylece, bulunan bu $a_j$ değerlerinin (0.2.1) de yerine yazılması ile elde edilen özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar yaklaşık olarak bulunmaktadır (Kythe and Puri 2002).
Ritz yönteminde, $P_n$, (0.2.1) de olduğu gibi $n.inci$ Legendre polinomunu göstermek üzere

$$\psi_n(s)=P_{n-1}(s), \quad n=1,...,n$$

olsun. Bu polinomlar $(-1,1)$ aralığında ortogonal olduklarından, $i\neq j$ için $\langle P_i,P_j\rangle=0$ ve diğer durumda $\langle P_i,P_i\rangle=2/(2i+1)$ eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned} \psi_1(s) &= P_0(s)=1, & \psi_2(s)=P_1(s)=s, \\ \psi_3(s) &= P_2(s)=\frac{1}{2}\left(3s^2-1\right), & \psi_4(s)=P_3(s)=\frac{1}{2}\left(5s^3-3s\right) \end{aligned}$$

olduğundan aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned} \langle\psi_1,\psi_1\rangle &= \int_{-1}^{1} ds=2, & \langle\psi_1,\psi_2\rangle=\int_{-1}^{1} sds=0, \\ \langle\psi_1,\psi_3\rangle &= \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\left(3s^2-1\right)ds=0, & \langle\psi_1,\psi_4\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\left(5s^3-3s\right)ds=0, \\ \langle\psi_2,\psi_2\rangle &= \int_{-1}^{1} s^2ds=\frac{2}{3}, & \langle\psi_2,\psi_3\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{s}{2}\left(3s^2-1\right)ds=0, \\ \langle\psi_2,\psi_4\rangle &= \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}s\left(5s^3-3s\right)ds=0, & \langle\psi_3,\psi_3\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\left(3s^2-1\right)^2ds=\frac{2}{5}, \\ \langle\psi_3,\psi_4\rangle &= \int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\left(3s^2-1\right)\left(5s^3-3s\right)ds=0, & \langle\psi_4,\psi_4\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\left(5s^3-3s\right)^2ds=\frac{2}{7}. \end{aligned}$$

$T_n$, $n.inci$ Chebshyev polinomunu göstermek üzere

$$\psi_n(s) = T_{n-1}(s), \qquad n = 1, ..., n$$

olsun. Bu polinomlar da $(-1, 1)$ aralığında ortogonal olduklarından

$$\begin{aligned}
\langle T_i, T_j \rangle &= 0, \qquad i \neq j, \\
\langle T_i, T_j \rangle &= \pi, \qquad i = j = 0, \\
\langle T_i, T_j \rangle &= \frac{\pi}{2}, \quad i = j = 1, 2, ..., n.
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\psi_1(s) = T_0(s) = 1,\ \psi_2(s) = T_1(s) = s,\ \psi_3(s) = T_2(s) = 2s^2 - 1,\ \psi_4(s) = T_3(s) = 4s^3 - 3s$$

olmak üzere basit hesaplamalarla aşağıdaki eşitliklerin sağlandığı görülür:

$$\begin{aligned}
\langle \psi_1, \psi_1 \rangle &= \int_{-1}^{1} \left(1 - s^2\right)^{-\frac{1}{2}} ds = \pi, \qquad && \langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \left(1 - s^2\right)^{-\frac{1}{2}} s ds = 0, \\
\langle \psi_2, \psi_2 \rangle &= \int_{-1}^{1} \left(1 - s^2\right)^{-\frac{1}{2}} s^2 ds = \frac{1}{2}\pi, && \langle \psi_3, \psi_3 \rangle = \int_{-1}^{1} \left(1 - s^2\right)^{-\frac{1}{2}} (2s^2 - 1)^2 ds = \frac{1}{2}\pi, \\
\langle \psi_1, \psi_3 \rangle &= \int_{-1}^{1} \left(1 - s^2\right)^{-\frac{1}{2}} (2s^2 - 1) ds = 0, && \langle \psi_2, \psi_3 \rangle = \int_{-1}^{1} \left(1 - s^2\right)^{-\frac{1}{2}} s(2s^2 - 1) ds = 0, \\
\langle \psi_1, \psi_4 \rangle &= \int_{-1}^{1} \left(1 - s^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(4s^3 - 3s\right) ds = 0, && \langle \psi_2, \psi_4 \rangle = \int_{-1}^{1} \left(1 - s^2\right)^{-\frac{1}{2}} s \left(4s^3 - 3s\right) ds = 0, \\
\langle \psi_3, \psi_4 \rangle &= \int_{-1}^{1} \left(1 - s^2\right)^{-\frac{1}{2}} (2s^2 - 1) \left(4s^3 - 3s\right) ds = 0, \\
\langle \psi_4, \psi_4 \rangle &= \int_{-1}^{1} \left(1 - s^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(4s^3 - 3s\right)^2 ds = \frac{1}{2}\pi.
\end{aligned}$$

## 0.3 Özdeğer Hesapları

Bu bölümde Ritz yöntemi kullanılarak bazı özel çekirdekli integral operatörlerinin özdeğerleri hesaplanacaktır. Örneklerde, Legendre ve Chebyshev polinomları alınarak Ritz yöntemi kullanılacaktır. Örneklerde çözüm içinde (a) da Legendre polinomları (b) de Chebyshev polinomları alınmıştır.

## 0.4 $N^+(K) = 1$ ve $N^-(K) = 0$ durumu ile ilgili örnek

**Örnek 0.4.1** *Ritz yöntemi kullanılarak*

$$k(s,t) = \frac{1}{9 + 3(s+t) + st}$$

*simetrik çekirdeğine karşılık gelen integral operatörün bir tane olan özdeğeri yaklaşık olarak bulunacaktır.*

**Çözüm.** $b^2 = ac$ olduğundan

$$N^+(K) = 1 \text{ ve } N^-(K) = 0$$

dır.

**(a)** Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Legendre polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s), \quad n = 1, ..., n$$

(0.2.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\phi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\phi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$$

elde edilir.

$$\langle K\psi_1, \psi_1 \rangle = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{1}{9 + 3(s+t) + st} dsdt = 0.48045$$

$$\langle K\psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{t}{9 + 3(s+t) + st} dsdt = -5.5065 \times 10^{-2}$$

$$\langle K\psi_2, \psi_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{st}{9 + 3(s+t) + st} dsdt = 6.3110 \times 10^{-3}$$

dir. Bu yüzden (0.2.3) sistemi

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0.48045-2\mu & -5.5065\times10^{-2} \\ -5.5065\times10^{-2} & 6.3110\times10^{-3}-\dfrac{2}{3}\mu \end{vmatrix} &= \\
1.3333\mu^2-0.33292\mu-3.4275\times10^{-8} &= 0
\end{aligned}$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$\mu_1 = 0.24970, \quad \mu_2 = -1.0295\times10^{-7}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.24970} = 4.0048 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{-1.0295\times10^{-7}} = -9.7135\times10^{6}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Fakat aranan özdeğer pozitif olacağından

$\lambda = 4.0048$

dir.

Şimdi aynı örnek için (0.2.1) formülünde $n=3$ alınacaktır. Buradan

$$\langle K\psi_1,\psi_1\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{9+3(s+t)+st}dsdt = 0.48045$$

$$\langle K\psi_1,\psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{t}{9+3(s+t)+st}dsdt = -5.5065\times10^{-2}$$

$$\langle K\psi_2,\psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{st}{9+3(s+t)+st}dsdt = 6.3110\times10^{-3}$$

$$\langle K\psi_1,\psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{2}(3t^2-1)}{9+3(s+t)+st}dsdt = 7.5646\times10^{-3}$$

$$\langle K\psi_2,\psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{2}s(3t^2-1)}{9+3(s+t)+st}dsdt = -8.6697\times10^{-4}$$

$$\langle K\psi_3,\psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{4}(3s^2-1)(3t^2-1)}{9+3(s+t)+st}dsdt = 1.191\times10^{-4}$$

elde edilir. Aynı şekilde (0.2.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 0.48045 - 2\mu & -5.5065\times 10^{-2} & 7.5646\times 10^{-3} \\ -5.5065\times 10^{-2} & 6.3110\times 10^{-3} - \frac{2}{3}\mu & -8.6697\times 10^{-4} \\ 7.5646\times 10^{-3} & -8.6697\times 10^{-4} & 1.191\times 10^{-4} - \frac{2}{5}\mu \end{vmatrix}$$
$$= \quad -0.53333\mu^3 + 0.13333\mu^2 + 1.4756\times 10^{-8}\mu - 5.4605\times 10^{-17} = 0$$

haline gelir ve

$\mu_1 = 0.25, \quad \mu_2 = 3.5844\times 10^{-9}, \quad \mu_3 = -1.1426\times 10^{-7}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{0.25} = 4.0 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{3.5844\times 10^{-9}} = 2.7899\times 10^{8} \\ \lambda_3 &= \frac{1}{-1.1426\times 10^{-7}} = -8.7520\times 10^{6} \end{aligned}$$

dir. Yine aranan yaklaşık özdeğer

$\lambda = 4.0$

olarak bulunmaktadır.

**(b)** $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Chebyshev polinomları seçilmektedir. Dolayısıyla

$\psi_n(s) = T_{n-1}(s), \qquad n = 1, ..., n$

alınacaktır. Yine (0.2.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınmıştır. Böylece

$$\langle K\psi_1, \psi_1\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}\,(9+3(s+t)+st)} dsdt = 0.769893$$

$$\langle K\psi_1, \psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-s^2}\,(9+3(s+t)+st)} dsdt = -0.0882374$$

$$\langle K\psi_2, \psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{st}{\sqrt{1-s^2}\,(9+3(s+t)+st)} dsdt = 0.0151391$$

iç çarpımları hesaplanır. Bunlar (0.2.3) sisteminde yazıldığında sistem

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 0.769893-\pi\mu & -0.0882374 \\ -0.0882374 & 0.0151391-\dfrac{\pi}{2}\mu \end{vmatrix} \\
= \;& 4.9348\mu^2 - 1.2569\mu + 3.8696\times 10^{-3} = 0
\end{aligned}
$$

haline gelir ve bu eşitlik çözüldüğünde

$\mu_1 = 0.25158, \quad \mu_2 = 3.1168\times 10^{-3}$

bulunur. Çekirdeğe karşılık gelen özdeğerlerin ikisinin yaklaşık değeri

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.25158} = 3.9749 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{3.1168\times 10^{-3}} = 320.84
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. En küçük pozitif özdeğer

$\lambda = 3.9749$

olarak bulunur.

Yine (0.2.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Chebyshev polinomları kullanılarak sırasıyla aşağıdaki işlemler yapıldığında

$$\langle K\psi_1, \psi_1\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}\,(9+3(s+t)+st)} dsdt = 0.769893$$

$$\langle K\psi_1, \psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-s^2}\,(9+3(s+t)+st)} dsdt = -0.0882374$$

$$\langle K\psi_2, \psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{st}{\sqrt{1-s^2}\,(9+3(s+t)+st)} dsdt = 0.0151391$$

$$\langle K\psi_1, \psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{2t^2-1}{\sqrt{1-s^2}\,(9+3(s+t)+st)} dsdt = -0.240469$$

$$\langle K\psi_2, \psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{s(2t^2-1)}{\sqrt{1-s^2}(9+3(s+t)+st)} dsdt = 0.0412579$$

$$\langle K\psi_3, \psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{(2s^2-1)(2t^2-1)}{\sqrt{1-s^2}(9+3(s+t)+st)} dsdt = -0.00707874$$

elde edilir. (0.2.3) sistemi

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 0.769893-\pi\mu & -0.0882374 & -0.240469 \\ -0.0882374 & 0.0151391-\dfrac{\pi}{2}\mu & 0.0412579 \\ -0.240469 & 0.0412579 & -0.00707874-\dfrac{\pi}{2}\mu \end{vmatrix} \\
&= \quad -7.7516\mu^3+1.9394\mu^2+9.8998\times10^{-2}\mu-4.6249\times10^{-4}=0
\end{aligned}$$

haline gelir ve bu denklemi çözüldüğünde

$$\mu_1 = 0.29308, \quad \mu_2 = 4.308\times10^{-3}, \quad \mu_3 = -4.7077\times10^{-2}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.29308} = 3.412, \\
\lambda_2 &= \frac{1}{4.3135\times10^{-3}} = 231.83, \\
\lambda_3 &= \frac{1}{-4.7196\times10^{-2}} = -21.188
\end{aligned}$$

elde edilir. Aranan özdeğer yine

$$\lambda = 3.412$$

olarak bulunur.

## 0.5 $N^+(K)=\infty$ ve $N^-(K)=0$ durumu ile ilgili örnekler

**Örnek 0.5.1** *Ritz yöntemi kullanılarak*

$$k(s,t) = \frac{3+s+t+\frac{1}{2}st}{1-st}$$

*simetrik çekirdeğine karşılık gelen integral operatörün özdeğerleri yaklaşık olarak bulunacaktır.*

**Çözüm.** $a+c \geq 2$ ve $a>1$ olduğundan

$N^{+}(K)=\infty$ ve $N^{-}(K)=0$

dir.

**(a)** Koordinat fonksiyonları için Legendre polinomları seçilerek (0.2.1) denkleminde $n=2$ alınmıştır. Böylece yine bu yöntemde kullanılan aşağıdaki eşitlikler

$$\langle K\psi_1, \psi_1\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\left(3+s+t+\frac{1}{2}st\right)}{1-st}\, dsdt = 15.2718$$

$$\langle K\psi_1, \psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\left(3+s+t+\frac{1}{2}st\right)t}{1-st}\, dsdt = 2.9348$$

$$\langle K\psi_2, \psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\left(3+s+t+\frac{1}{2}st\right)st}{1-st}\, dsdt = 3.27181$$

elde edilir. (0.2.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 15.2718-2\mu & 2.9348 \\ 2.9348 & 3.27181-\dfrac{2}{3}\mu \end{vmatrix} = 1.3333\mu^2 - 16.725\mu + 41.353 = 0$$

şeklindedir ve buradan

$\mu_1 = 3.3871, \quad \mu_2 = 9.1570$

dir. O zaman ilk iki yaklaşık özdeğer

$$\lambda_1 = \frac{1}{3.3871} = 0.29524$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{9.1570} = 0.10921$$

olarak bulunur ve en küçük özdeğer ise yaklaşık olarak

$\lambda = 0.10921$

dir.

Şimdi yine aynı çekirdek için (0.2.1) denkleminde $n=3$ alınır. Benzer hesaplamalar yapılarak

$$\langle K\psi_1,\psi_1\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\left(3+s+t+\frac{1}{2}st\right)}{1-st}\,dsdt = 15.2718$$

$$\langle K\psi_1,\psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\left(3+s+t+\frac{1}{2}st\right)t}{1-st}\,dsdt = 2.9348$$

$$\langle K\psi_2,\psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\left(3+s+t+\frac{1}{2}st\right)st}{1-st}\,dsdt = 3.27181$$

$$\langle K\psi_1,\psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\left(3+s+t+\frac{1}{2}st\right)\frac{1}{2}\left(3t^2-1\right)}{1-st}\,dsdt = 1.8641$$

$$\langle K\psi_2,\psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\left(3+s+t+\frac{1}{2}st\right)s\frac{1}{2}\left(3t^2-1\right)}{1-st}\,dsdt = 0.934802$$

$$\langle K\psi_3,\psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\left(3+s+t+\frac{1}{2}st\right)\frac{1}{2}\left(3s^2-1\right)\frac{1}{2}\left(3t^2-1\right)}{1-st}\,dsdt = 1.17952$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece (0.2.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 15.2718-2\mu & 2.9348 & 1.8641 \\ 2.9348 & 3.27181-\frac{2}{3}\mu & 0.934802 \\ 1.8641 & 0.934802 & 1.17952-\frac{2}{5}\mu \end{vmatrix}$$
$$= -0.533\,33\mu^3 + 8.262\,6\mu^2 - 32.204\mu + 34.291 = 0$$

halini alır ve bu denklem çözüldüğünde

$$\mu_1 = 10.183,\quad \mu_2 = 3.512\,0,\quad \mu_3 = 1.797\,9$$

olarak bulunur. Buradan yaklaşık olarak üç özdeğerin

$$\lambda_1 = \frac{1}{10.183} = 0.098203$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{3.512\,0} = 0.284\,74$$
$$\lambda_3 = \frac{1}{1.797\,9} = 0.556\,2$$

olduğu görülür. Dikkat edilirse yine en küçük olan özdeğer yaklaşık olarak

$$\lambda = 0.098203$$

dir.

**(b)** Bu çekirdek için Ritz yönteminde Chebyshev polinomları kullanılarak yine sırasıyla (0.2.1) denkleminde $n = 2$ ve $n = 3$ alınmıştır. Öncelikle $n = 2$ alındığında

$$\langle K\psi_1, \psi_1 \rangle = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{\left(3 + s + t + \frac{1}{2}st\right)}{\sqrt{1 - s^2}\,(1 - st)} dsdt \ = 31.402$$

$$\langle K\psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{\left(3 + s + t + \frac{1}{2}st\right) t}{\sqrt{1 - s^2}\,(1 - st)} dsdt \ = 8.52122$$

$$\langle K\psi_2, \psi_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{\left(3 + s + t + \frac{1}{2}st\right) st}{\sqrt{1 - s^2}\,(1 - st)} dsdt \ = 11.9728$$

eşitlikleri elde edilir. (0.2.3) sistemi çözüldüğünde

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 31.402 - \pi\mu & 8.52122 \\ 8.52122 & 11.9728 - \frac{\pi}{2}\mu \end{vmatrix} &= \\ 4.934\,8\mu^2 - 86.940\mu + 303.36 &= 0 \end{aligned}$$

ve buradan

$$\mu_1 = 4.793\,6,. \ \ \mu_2 = 12.824$$

elde edilir. Böylece yaklaşık özdeğerler

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{4.793\,6} = 0.208\,61 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{12.824} = 0.077979 \end{aligned}$$

olarak bulunmuş olur. En küçük olan özdeğer

$$\lambda = 0.077979$$

dir.

Eğer (0.2.1) denkleminde $n = 3$ alınırsa

$$\langle K\psi_1, \psi_1 \rangle = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{\left(3 + s + t + \frac{1}{2}st\right)}{\sqrt{1 - s^2}\,(1 - st)} dsdt \ = 31.402$$

$$\langle K\psi_1, \psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\left(3+s+t+\frac{1}{2}st\right)t}{\sqrt{1-s^2}\,(1-st)}dsdt \ = 8.52122$$

$$\langle K\psi_2, \psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\left(3+s+t+\frac{1}{2}st\right)st}{\sqrt{1-s^2}\,(1-st)}dsdt \ = 11.9728$$

$$\langle K\psi_1, \psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\left(3+s+t+\frac{1}{2}st\right)(2t^2-1)}{\sqrt{1-s^2}\,(1-st)}dsdt \ = 1.0472$$

$$\langle K\psi_2, \psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\left(3+s+t+\frac{1}{2}st\right)s(2t^2-1)}{\sqrt{1-s^2}\,(1-st)}dsdt \ = 2.98405$$

$$\langle K\psi_3, \psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\left(3+s+t+\frac{1}{2}st\right)(2s^2-1)(2t^2-1)}{\sqrt{1-s^2}\,(1-st)}dsdt \ = 6.22757$$

eşitlikleri elde edilir. Bu sonuçlar (0.2.3) sisteminde yerine yazılmaktadır ve elde edilen denklem çözülürse

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 36.7817-\pi\mu & 8.52122 & 1.0472 \\ 8.52122 & 11.9728-\frac{\pi}{2}\mu & 2.98405 \\ 1.0472 & 2.98405 & 6.22757-\frac{\pi}{2}\mu \end{vmatrix} \\ = \ & -7.751\,6\mu^3 + 180.57\mu^2 - 1142.0\mu + 2002.9 = 0 \end{aligned}$$

$\mu_1 = 14.202, \qquad \mu_2 = 6.119\,1, \quad \mu_3 = 13.721$

bulunur. Böylece yine yaklaşık özdeğerler

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{14.202} = 0.070413 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{6.119\,1} = 0.16342 \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2.973\,2} = 0.33634 \end{aligned}$$

olarak elde edilir ve en küçük olan özdeğer yaklaşık olarak

$\lambda = 0.070413$

dir.

**Örnek 0.5.2** *Ritz yöntemi kullanılarak*

$$k(s,t) = \frac{1}{13-5(s+t)+st}$$

*simetrik çekirdeğine karşılık gelen integral operatörün en küçük pozitif özdeğeri yaklaşık olarak bulunacaktır.*

**Çözüm.** $b^2 > ac$ olduğundan

$N^+(K) = \infty$ ve $N^-(K) = 0$

dır.

**(a)** Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının olusturduğu koordinat sistemi için Legendre polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s), \quad n = 1, ..., n$$

(0.2.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\phi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\phi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$$

elde edilir.

$$\langle K\psi_1, \psi_1 \rangle = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{1}{13 - 5(s+t) + st} \, dsdt = 0.344604$$

$$\langle K\psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{t}{13 - 5(s+t) + st} dsdt = 0.0490412$$

$$\langle K\psi_2, \psi_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{st}{13 - 5(s+t) + st} dsdt = 0.010566$$

dir. Bu yüzden (0.2.3) sistemi

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 0.344604 - 2\mu & 0.0490412 \\ 0.0490412 & 0.010566 - \frac{2}{3}\mu \end{vmatrix} \\ = & \ 1.3333\mu^2 - 0.25087\mu + 1.236 \times 10^{-3} = 0 \end{aligned}$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$\mu_1 = 0.183\,09, \quad \mu_2 = 5.\,063\,1 \times 10^{-3}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{0.183\,09} = 5.\,461\,8 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{5.\,063\,1 \times 10^{-3}} = 197.\,51\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer;

$\lambda = 5.\,461\,8$

dir.

Şimdi aynı örnek için (0.2.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$\langle K\psi_1, \psi_1 \rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{13 - 5(s+t) + st} dsdt = 0.344604$$

$$\langle K\psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{t}{13 - 5(s+t) + st} dsdt = 0.0490412$$

$$\langle K\psi_2, \psi_2 \rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{st}{13 - 5(s+t) + st} dsdt = 0.010566$$

$$\langle K\psi_1, \psi_3 \rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{2}(3t^2 - 1)}{13 - 5(s+t) + st} dsdt = 0.0085017$$

$$\langle K\psi_2, \psi_3 \rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{2}s(3t^2 - 1)}{13 - 5(s+t) + st} dsdt = 0.00243894$$

$$\langle K\psi_3, \psi_3 \rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{4}(3s^2 - 1)(3t^2 - 1)}{13 - 5(s+t) + st} dsdt = 0.000683497$$

elde edilir. Aynı şekilde (0.2.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 0.344604 - 2\mu & 0.0490412 & 0.0085017 \\ 0.0490412 & 0.010566 - \frac{2}{3}\mu & 0.00243894 \\ 0.0085017 & 0.00243894 & 0.000683497 - \frac{2}{5}\mu \end{vmatrix}$$

$$= -0.533\,33\mu^3 + 0.101\,26\mu^2 - 6.\,058 \times 10^{-4}\mu + 6.\,503\,5 \times 10^{-8} = 0$$

haline gelir ve

$\mu_1 = 0.183\,68, \quad \mu_2 = 6.070\,9 \times 10^{-3}, \quad \mu_3 = 1.093\,5 \times 10^{-4}$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.183\,68} = 5.444\,3 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{6.070\,9 \times 10^{-3}} = 164.72 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{1.093\,5 \times 10^{-4}} = 9144.9
\end{aligned}$$

dir. Yine aranan yaklaşık özdeğer

$\lambda = 5.444\,3$

olarak bulunmaktadır.

**(b)** $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Chebyshev polinomları seçilmektedir. Dolayısıyla

$\psi_n(s) = T_{n-1}(s), \quad n = 1, ..., n$

alınacaktır. Yine (0.2.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınmıştır. Böylece

$$\langle K\psi_1, \psi_1 \rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}\,(13 - 5(s+t) + st)} dsdt = 0.558659$$

$$\langle K\psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-s^2}\,(13 - 5(s+t) + st)} dsdt = 0.0821047$$

$$\langle K\psi_2, \psi_2 \rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{st}{\sqrt{1-s^2}\,(13 - 5(s+t) + st)} dsdt = 0.026139$$

iç çarpımları hesaplanır. Bunlar (0.2.3) sisteminde yazıldığında sistem

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 0.558659 - \pi\mu & 0.0821047 \\ 0.0821047 & 0.026139 - \frac{\pi}{2}\mu \end{vmatrix} \\
= \;& 4.934\,8\mu^2 - 0.959\,66\mu + 7.861\,6 \times 10^{-3} = 0
\end{aligned}$$

haline gelir ve bu eşitlik çözüldüğünde

$\mu_1 = 0.185\,90, \quad \mu_2 = 8.\,569\,7 \times 10^{-3}$

bulunur. Çekirdeğe karşılık gelen özdeğerlerin ikisinin yaklaşık değeri

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{0.185\,90} = 5.\,379\,2 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{8.\,569\,7 \times 10^{-3}} = 116.\,69
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. İstenen en küçük pozitif özdeğer olduğundan

$\lambda = 5.\,379\,2$

dir.

Yine (0.2.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Chebyshev polinomları kullanılarak sırasıyla aşağıdaki işlemler yapıldığında

$$\langle K\psi_1, \psi_1\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}\,(13-5(s+t)+st)} dsdt = 0.558659$$

$$\langle K\psi_1, \psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-s^2}\,(13-5(s+t)+st)} dsdt = 0.0821047$$

$$\langle K\psi_2, \psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{st}{\sqrt{1-s^2}\,(13-5(s+t)+st)} dsdt = 0.026139$$

$$\langle K\psi_1, \psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{(2t^2-1)}{\sqrt{1-s^2}\,(13-5(s+t)+st)} dsdt = -0.166484$$

$$\langle K\psi_2, \psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{s(2t^2-1)}{\sqrt{1-s^2}\,(13-5(s+t)+st)} dsdt = -0.0314561$$

$$\langle K\psi_3, \psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{(2s^2-1)(2t^2-1)}{\sqrt{1-s^2}\,(13-5(s+t)+st)} dsdt = 4.72969$$

elde edilir. (0.2.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 0.558659-\pi\mu & 0.0821047 & -0.166484 \\ 0.0821047 & 0.026139-\frac{\pi}{2}\mu & -0.0314561 \\ -0.166484 & -0.0314561 & 4.72969-\frac{\pi}{2}\mu \end{vmatrix}$$
$$= -7.7516\mu^3+24.848\mu^2-4.5046\mu+3.6766\times10^{-2}=0$$

haline gelir ve bu denklemi çözüldüğünde

$\mu_1 = 0.18377, \quad \mu_2 = 3.0132, \quad \mu_3 = 8.5655\times10^{-3}$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{0.18377} = 5.4416 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{3.0132} = 0.33187 \\ \lambda_3 &= \frac{1}{8.5655\times10^{-3}} = 116.75 \end{aligned}$$

elde edilir. Aranan özdeğer yine

$\lambda = 5.4416$

dir.

**Örnek 0.5.3** *Ritz yöntemi kullanılarak*

$$k(s,t)=\frac{3+4st}{1-st}$$

*simetrik çekirdeğine karşılık gelen integral operatörün pozitif olan en küçük özdeğeri yaklaşık olarak bulunacaktır.*

**Çözüm.** $b=0$ ve $a+c>0$ olduğundan

$N^+(K)=\infty$ ve $N^-(K)=0$

dır.

**(a)** Ritz yönteminde $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının olusturduğu koordinat sistemi için Legendre polinomlar sistemi seçilmektedir.

$$\psi_n(s) = P_{n-1}(s), \quad n = 1, ..., n$$

(0.2.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınacaktır. O zaman

$$\phi_n(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(s)$$

olmak üzere

$$\phi_2(s) = a_1 P_0(s) + a_2 P_1(s)$$

elde edilir.

$$\langle K\psi_1, \psi_1 \rangle = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{3+4st}{1-st} dsdt = 18.5436$$

$$\langle K\psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{(3+4st)t}{1-st} dsdt = 0$$

$$\langle K\psi_2, \psi_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{(3+4st)st}{1-st} dsdt = 6.54362$$

dir. Bu yüzden (0.2.3) sistemi

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 18.5436 - 2\mu & 0 \\ 0 & 6.54362 - \frac{2}{3}\mu \end{vmatrix} \\ = \; & 1.3333\mu^2 - 25.450\mu + 121.34 = 0 \end{aligned}$$

haline gelir ve bu sistem çözüldüğünde

$$\mu_1 = 9.2604, \quad \mu_2 = 9.8276$$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{9.2604} = 0.10799 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{9.8276} = 0.10175 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aranan en küçük pozitif özdeğer

$\lambda = 0.101\,75$

dir.

Şimdi aynı örnek için (0.2.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Buradan

$$\langle K\psi_1, \psi_1\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{3+4st}{1-st}dsdt = 18.5436$$

$$\langle K\psi_1, \psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{(3+4st)t}{1-st}dsdt = 0$$

$$\langle K\psi_2, \psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{(3+4st)st}{1-st}dsdt = 6.54362$$

$$\langle K\psi_1, \psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{2}\left(3t^2-1\right)(3+4st)}{1-st}dsdt = 3.72819$$

$$\langle K\psi_2, \psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{2}s\left(3t^2-1\right)(3+4st)}{1-st}dsdt = 0$$

$$\langle K\psi_3, \psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{4}\left(3s^2-1\right)\left(3t^2-1\right)(3+4st)}{1-st}dsdt = 2.35904$$

elde edilir. Aynı şekilde (0.2.3) sistemi

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 18.5436-2\mu & 0 & 3.72819 \\ 0 & 6.54362-\frac{2}{3}\mu & 0 \\ 3.72819 & 0 & 2.35904-\frac{2}{5}\mu \end{vmatrix} \\
= \quad & -0.533\,33\mu^3 + 13.\,325\mu^2 - 99.\,307\mu + 195.\,30 = 0
\end{aligned}$$

haline gelir ve

$\mu_1 = 3.\,088\,0, \quad \mu_2 = 9.\,817\,3, \quad \mu_3 = 12.\,079$

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{3.0880} = 0.32383 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{9.8173} = 0.10186 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{12.079} = 0.008278
\end{aligned}$$

dir. Yine aranan yaklaşık özdeğer

$$\lambda = 0.10186$$

olarak bulunmaktadır.

**(b)** $\psi_n(s)$ fonksiyonlarının oluşturduğu koordinat sistemi için Chebyshev polinomları seçilmektedir. Dolayısıyla

$$\psi_n(s) = T_{n-1}(s), \qquad n = 1, ..., n$$

alınacaktır. Yine (0.2.1) formülündeki terimlerden yalnızca ikisi alınmıştır. Böylece

$$\langle K\psi_1, \psi_1 \rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{3+4st}{\sqrt{1-s^2}\,(1-st)} dsdt = 43.9545$$

$$\langle K\psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{(3+4st)t}{\sqrt{1-s^2}\,(1-st)} dsdt = 0$$

$$\langle K\psi_2, \psi_2 \rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{(3+4st)st}{\sqrt{1-s^2}\,(1-st)} dsdt = -14.3735$$

iç çarpımları hesaplanır. Bunlar (0.2.3) sisteminde yazıldığında sistem

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 43.9545 - \pi\mu & 0 \\ 0 & -14.3735 - \frac{\pi}{2}\mu \end{vmatrix} \\
=\;& 4.9348\mu^2 - 23.888\mu - 631.78 = 0
\end{aligned}$$

haline gelir ve bu eşitlik çözüldüğünde

$$\mu_1 = 13.991, \quad \mu_2 = -9.1504$$

bulunur. Çekirdeğe karşılık gelen özdeğerlerin ikisinin yaklaşık değeri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{13.991} = 0.071475 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{-9.1504} = -0.10928
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Fakat istenen özdeğer pozitif olacağından

$$\lambda = 0.071475$$

dir.

Yine (0.2.1) formülünde $n = 3$ alınacaktır. Chebyshev polinomları kullanılarak sırasıyla aşağıdaki işlemler yapıldığında

$$\langle K\psi_1, \psi_1\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{3+4st}{\sqrt{1-s^2}\,(1-st)} dsdt = 43.9545$$

$$\langle K\psi_1, \psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{(3+4st)t}{\sqrt{1-s^2}\,(1-st)} dsdt = 0$$

$$\langle K\psi_2, \psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{(3+4st)st}{\sqrt{1-s^2}\,(1-st)} dsdt = -14.3735$$

$$\langle K\psi_1, \psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{(3+4st)(2t^2-1)}{\sqrt{1-s^2}\,(1-st)} dsdt = 8.37758$$

$$\langle K\psi_2, \psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{s(2t^2-1)(3+4st)}{\sqrt{1-s^2}(1-st)} dsdt = 32.8448$$

$$\langle K\psi_3, \psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{(2s^2-1)(2t^2-1)(3+4st)}{\sqrt{1-s^2}(1-st)} dsdt = -105.98$$

elde edilir. (0.2.3) sistemi

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 43.9545 - \pi\mu & 0 & 8.37758 \\ 0 & -14.3735 - \frac{\pi}{2}\mu & 32.8448 \\ 8.37758 & 32.8448 & -105.98 - \frac{\pi}{2}\mu \end{vmatrix} \\
= \;& -7.7516\mu^3 - 485.47\mu^2 + 7023.4\mu + 20548 = 0
\end{aligned}$$

haline gelir ve bu denklemi çözüldüğünde

$\mu_1 = 14.217, \quad \mu_2 = -2.5082, \quad \mu_3 = -74.337$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{14.217} = 0.070338 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{-2.5082} = -0.39869 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{-74.337} = -0.013452
\end{aligned}$$

elde edilir. Aranan özdeğer yine

$\lambda = 0.070338$

dir.

Çizelge 3.3 Rasyonel çekirdekli bazı integral operatörlerin Ritz Yöntemi ile bulunan yaklaşık özdeğerleri

| $k(s,t)$ çekirdeği | *Legendre Polynomials* | | *Chebsyev Polynomials* | |
|---|---|---|---|---|
| | $n = 2$ için $\lambda$ | $n = 3$ için $\lambda$ | $n = 2$ için $\lambda$ | $n = 3$ için $\lambda$ |
| $\frac{3+s+t+\frac{1}{2}st}{1-st}$ | 0.10921 | 0.09823 | 0.077979 | 0.070413 |
| $\frac{1}{13-5(s+t)+st}$ | 5.4618 | 5.4443 | 5.3792 | 5.4416 |
| $\frac{3+4st}{1-st}$ | 0.10175 | 0.10186 | 0.071475 | 0.070338 |

## 0.6 $N^+(K) = \infty$ ve $N^-(K) = 1$ durumu ile ilgili örnek

**Örnek 0.6.1** *Ritz yöntemi kullanılarak*

$$k(s,t) = \frac{\frac{1}{2} + 3(s+t) + 4st}{1 - st}$$

*simetrik çekirdeğine karşılık gelen integral operatörün özdeğerleri yaklaşık olarak bulunacaktır.*

**Çözüm.** $a + c \geq 2$ ve $c > 1$ olduğundan

$N^+(K) = \infty$ ve $N^-(K) = 1$

dir.

**(a)** $k(s,t)$ çekirdeğine karşılık gelen integral operatörlerin özdeğerlerini yaklaşık olarak bulurken Ritz yönteminde yine öncelikle koordinat fonksiyonları için Legendre polinomları seçilmektir. (0.2.1) denkleminde öncelikle $n=2$ alınır ve daha sonra ilk iki Legendre polinomu kullanılarak

$$\langle K\psi_1,\psi_1\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{2}+3(s+t)+4st}{1-st}dsdt = 6.20661$$

$$\langle K\psi_1,\psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\left(\frac{1}{2}+3(s+t)+4st\right)t}{1-st}dsdt = 8.80441$$

$$\langle K\psi_2,\psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\left(\frac{1}{2}+3(s+t)+4st\right)st}{1-st}dsdt = 0.467401$$

eşitlikleri elde edilir. Bu değerler (0.2.3) sisteminde yazıldığında

$$\begin{vmatrix} 6.20661-2\mu & 8.80441 \\ 8.80441 & 4.20661-\frac{2}{3}\mu \end{vmatrix}$$
$$= \ 1.3333\mu^2 - 12.551\mu - 51.409 = 0$$

bulunur ve buradan

$$\mu_1 = -3.0850, \qquad \mu_2 = 12.498$$

dir. Böylece ilk iki yaklaşık özdeğer

$$\lambda_1 = \frac{1}{-3.0850} = -0.32415$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{12.498} = 0.080013$$

dir. Bu yüzden pozitif olan özdeğerin yaklaşık olarak

$$\lambda = 0.080013$$

olduğu görülür.

Şimdi Legendre polinomlarının ilk üçü alınırsa

$$\langle K\psi_1, \psi_1\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\left(\frac{1}{2}+3(s+t)+4st\right)}{1-st} dsdt = 6.20661$$

$$\langle K\psi_1, \psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\left(\frac{1}{2}+3(s+t)+4st\right)t}{1-st} dsdt = 8.80441$$

$$\langle K\psi_2, \psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\left(\frac{1}{2}+3(s+t)+4st\right)st}{1-st} dsdt = 4.20661$$

$$\langle K\psi_1, \psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\left(\frac{1}{2}+3(s+t)+4st\right)\frac{1}{2}\left(3t^2-1\right)}{1-st} dsdt = 2.3967$$

$$\langle K\psi_2, \psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\left(\frac{1}{2}+3(s+t)+4st\right)s\frac{1}{2}\left(3t^2-1\right)}{1-st} dsdt = 2.80441$$

$$\langle K\psi_3, \psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\left(\frac{1}{2}+3(s+t)+4st\right)\frac{1}{2}\left(3s^2-1\right)\frac{1}{2}\left(3t^2-1\right)}{1-st} dsdt = 1.51652$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece (0.2.3) sistemi

$$\begin{vmatrix} 6.20661-2\mu & 8.80441 & 2.3967 \\ 8.80441 & 4.20661-\dfrac{2}{3}\mu & 2.80441 \\ 2.3967 & 2.80441 & 1.51652-\dfrac{2}{5}\mu \end{vmatrix}$$
$$= \quad -0.533\,33\mu^3 + 7.042\,4\mu^2 + 21.089\mu - 32.585 = 0$$

halini alır ve buradan

$\mu_1 = -3.441\,8, \quad \mu_2 = 1.145\,2, \quad \mu_3 = 15.501$

bulunur. Bundan dolayı ilk üç özdeğerin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{-3.441\,8} = -0.290\,55 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{1.145\,2} = 0.873\,21 \\ \lambda_3 &= \frac{1}{15.501} = 6.451\,2\times 10^{-2} \end{aligned}$$

dir. Böylece pozitif olan en küçük özdeğer yaklaşık olarak

$\lambda = 0.873\,21$

elde edilir.

**(b)** Aynı integral operatörün yaklaşık özdeğerleri bulunurken Chebshyev polinomlarının ilk ikisi kullanılırsa

$$\langle K\psi_1, \psi_1\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{2} + 3(s+t) + 4st}{\sqrt{1-s^2}\,(1-st)} dsdt = 19.2805$$

$$\langle K\psi_1, \psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\left(\frac{1}{2} + 3(s+t) + 4st\right) t}{\sqrt{1-s^2}\,(1-st)} dsdt = 25.5637$$

$$\langle K\psi_2, \psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\left(\frac{1}{2} + 3(s+t) + 4st\right) st}{\sqrt{1-s^2}\,(1-st)} dsdt = -10.274$$

iç çarpımları elde edilir. Bu değerler (0.2.3) sisteminde yerine yazılır ve elde edilen denklemler çözülürse

$$\begin{vmatrix} 19.2805 - \pi\mu & 25.5637 \\ 25.5637 & -10.274 - \frac{\pi}{2}\mu \end{vmatrix}$$
$$= \quad 4.934\,8\mu^2 + 1.991\,0\mu - 851.59 = 0$$

$$\mu_1 = -13.340, \quad \mu_2 = 12.936$$

olarak bulunur. Böylelikle yine yaklaşık özdeğerler

$$\lambda_1 = \frac{1}{-13.340} = -0.07496\,3$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{12.936} = 0.07730\,4$$

dir ve buradan da pozitif özdeğerin yaklaşık olarak

$$\lambda = 0.07730\,4$$

olduğu görülür.

(0.2.1) denkleminde şimdi $n = 3$ alınacaktır. Yine Chebshyev polinomlarının ilk üçü kullanılırsa

$$\langle K\psi_1, \psi_1\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\left(\frac{1}{2} + 3(s+t) + 4st\right)}{\sqrt{1-s^2}\,(1-st)} dsdt = 19.2805$$

$$\langle K\psi_1,\psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\left(\frac{1}{2}+3(s+t)+4st\right)t}{\sqrt{1-s^2}\,(1-st)}dsdt = 25.5637$$

$$\langle K\psi_2,\psi_2\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\left(\frac{1}{2}+3(s+t)+4st\right)st}{\sqrt{1-s^2}\,(1-st)}dsdt = -10.274$$

$$\langle K\psi_1,\psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\left(\frac{1}{2}+3(s+t)+4st\right)(2t^2-1)}{\sqrt{1-s^2}\,(1-st)}dsdt = 8.37758$$

$$\langle K\psi_2,\psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\left(\frac{1}{2}+3(s+t)+4st\right)s(2t^2-1)}{\sqrt{1-s^2}\,(1-st)}dsdt = -17.4207$$

$$\langle K\psi_3,\psi_3\rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\left(\frac{1}{2}+3(s+t)+4st\right)(2s^2-1)(2t^2-1)}{\sqrt{1-s^2}\,(1-st)}dsdt = 8.00688$$

eşitlikleri elde edilir. Bulunan değerler (0.2.3) sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 19.2805-\pi\mu & 25.5637 & 8.37758 \\ 25.5637 & -10.274-\frac{\pi}{2}\mu & -17.4207 \\ 8.37758 & -17.4207 & 8.00688-\frac{\pi}{2}\mu \end{vmatrix} \\
= \;& -7.7516\mu^3+36.385\mu^2+2417.3\mu-19410.0=0
\end{aligned}$$

$\mu_1=-18.868,\quad \mu_2=9.3160,\quad \mu_3=14.246$

olarak bulunur. Böylece özdeğerlerin yaklaşık değerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{-18.868}=-0.053 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{9.3160}=0.10734 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{14.246}=0.070195
\end{aligned}$$

dir ve bundan dolayı da pozitif olan en küçük özdeğerin yaklaşık değeri

$\lambda=0.070195$

olarak elde edilir.

# Kaynakça

[1] Abbas M A A (1997) Integral Operators With Rational Kernels. PhD. Thesis, University of Manchester, Department of Mathematics, UK

[2] Göcen, M. (2010) İntegral Operatörleri, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi (doktora tezi).

[3] Krasnov M, Kıselev A and Makeronko G (1976) İntegral Denklemler, Cerit Yayınları, İstanbul.

[4] Kythe P K and Puri P (2002) Computational Methods for Linear İntegral Equations, Birkhauser, Boston.

[5] Yaşar İ B (1988) Uygulamalı Matematik, Gazi Üniversitesi Yayınları, Ankara.